Distance to the Analytic Toeplitz Operators(Linear Operators and Inequalities)

AUTHOR(S):

斎藤, 吉助; 小西, 祐史

数理解析研究所講究録
第860巻 1994年 92-97

Distance to the Analytic Toeplitz Operators

新潟大　理　　　　斎藤　吉助 (Kichi-Suke Saito)
新潟大　自然科学　小西　祐史 (Yuji Konishi)

1. 序論.

作用素環に対する距離公式の研究が、最近 10 数年の間に多くの人々によって研究され、発展してきた。$\mathfrak{A}$ を Hilbert 空間 K 上の作用素環とするとき、ある正の定数 C が存在して、任意の $T \in B(H)$ に対して,

$$d(T, \mathfrak{A}) \leq C \sup\{\| P_{\mathfrak{M}}^{\perp} T P_{\mathfrak{M}} \| : \mathfrak{M} \in Lat\, \mathfrak{A}\},$$

が成り立つときをいう。ここで、$d(T, \mathfrak{A})$ は T と $\mathfrak{A}$ の距離、$Lat\,\mathfrak{A}$ は K の全ての $\mathfrak{A}$-不変部分空間とする。また、C の下限を距離定数と呼ぶことにする。一般の von Neumann 環の hyperreflexivity は、未だに解っていない。非自己共役な環についての、我々の場合に関連した結果をあげてみる。1 次元トーラス $\mathbb{T}$ 上の H^∞ にシンボルを持つ Toeplitz 作用素全体からなる環 $\mathcal{T}(H^\infty)$ は Davidson [3] により、M を単射的 von Neumann 環とするとき、$M \otimes \mathcal{T}(H^\infty)$ は Rosenoer [13] によりそれぞれ hyperreflexive であることが示された。ここでは、それらの環のある意味の拡張である解析的接合積に付随した解析的 Toeplitz 作用素全体に対する距離公式を導くことを目的とする。

2. 解析的接合積と解析的 Toeplitz 作用素の定義.

解析的接合積は 1 次元トーラス $\mathbb{T}$ 上の H^∞ の自然な非可換の拡張であり、von Neumann 環とその自己同型を与えると定義できる。解析的 Toeplitz 作用素についても同様である。M を σ-有限 von Neumann 環、$L^2(M)$ を Haagerup [5] において定義された非可換 L^2-空間とする。任意の $x \in M$ に対して、$L^2(M)$ 上の作用素 l_x 、r_x を

$$l_x k = xk, \qquad r_x k = kx, \quad \forall x \in M, \quad \forall k \in L^2(M),$$

で定義し、$l(M) = \{l_x : x \in M\}$ 、$r(M) = \{r_x : x \in M\}$ とおく。まず、解析的接合積を定義する。α を M の$*$-自己同型とする。J を $Jk = k^*$, $\forall k \in L^2(M)$ によって定義される対合とし、$L^2(M)_+$ を $L^2(M)$ の正の元全体とする。その時、$\{l(M), L^2(M), J, L^2(M)_+\}$ は標準型となることが知られているので、$L^2(M)$ 上のユニタリー作用素 u で次を満たすものが存在する (Haagerup [4])。

(1) $l_{\alpha(x)} = u l_x u^*, \quad x \in M,$
(2) $J = uJu^*,$
(3) $u(L^2(M)_+) = L^2(M)_+.$

Hilbert 空間 $\mathbb{L}^2$ を $\mathbb{L}^2 = \{f : \mathbb{Z} \to L^2(M) \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}} \| f(n) \|_2^2 < \infty\}$ で定義するとこれは、$l^2(\mathbb{Z}) \otimes L^2(M)$ と同型である。任意の $x \in M$ に対して、$\mathbb{L}^2$ 上の作用素 L_x, R_x, L_δ 、R_δ を次で定義する。

$$\begin{aligned}(L_x f)(n) &= l_x f(n), \quad (R_x f)(n) = r_{\alpha^n(x)} f(n), \\ (L_\delta f)(n) &= u f(n-1), \quad (R_\delta f)(n) = f(n-1).\end{aligned}$$

$L(M) = \{L_x : x \in M\}$, $R(M) = \{R_x : x \in M\}$ とする。いま、$\mathfrak{L} = \{L(M), L_\delta\}''$, $\mathfrak{R} = \{R(M), R_\delta\}''$ とおくと、$\mathfrak{L}' = \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}' = \mathfrak{L}$ である。そして、$\mathfrak{L}_+$ ($\mathfrak{R}_+$) をそれぞれ $L(M)$ と L_δ ($R(M)$ と R_δ) で生成される $\mathfrak{L}$ ($\mathfrak{R}$) の σ-弱閉部分環とする。これは、それぞれ左（右）解析的接合積と呼ばれる非自己共役環で一般には非可換である。次に、解析的 Toeplitz 作用素を定義し、その若干の性質について述べる。Hilbert 空間 $\mathbb{H}^2$ を $\mathbb{H}^2 = \{f \in \mathbb{L}^2 : f(n) = 0,\ n < 0\}$ で定義し、各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して P_n を $\mathbb{L}^2$ から $R_\delta^n \mathbb{H}^2$ への射影とすると、P_0 は $\mathbb{L}^2$ から $\mathbb{H}^2$ への射影である。任意の A に対して、$\mathbb{H}^2$ 上の作用素 T_A を $T_A f = P_0(Af)$, $\forall f \in \mathbb{H}^2$ で定義する。このとき、T_A を Toeplitz 作用素と呼ぶ。特に、シンボル A が解析的接合積に属すとき、T_A を解析的 Toeplitz 作用素と呼ぶ。これについては $H^2(\mathbb{T})$ 上の Toeplitz 作用素と同様に次が成り立つことが知られている ([12])。

(1) 写像　$\mathfrak{L} \ni A \to T_A$ は 等距離 $*$-線形同型である。

(2) $B \in \mathfrak{L}_+ \cup \mathfrak{R}_+$ または $A^* \in \mathfrak{L}_+ \cup \mathfrak{R}_+$ ならば
$T_A T_B$ は Toeplitz 作用素であって、T_{AB} に等しい。

いま、$T(\mathfrak{L}) = \{T_A : A \in \mathfrak{L}\}$, $T(\mathfrak{L}_+) = \{T_A : A \in \mathfrak{L}_+\}$ とおく。

3. 条件付期待値と射影の構成.

ここでは条件付期待値のことを単に期待値と呼ぶことにする。$\mathcal{B}$ を単位元 1 を持つ C^*-環、$\mathcal{C}$ を単位元 1 を持つ $\mathcal{B}$ の C^*-部分環とする。$\mathcal{B}$ から $\mathcal{C}$ への正の線形写像 Φ が期待値であるとは、$\Phi(1) = 1$, $\Phi(BC) = \Phi(B)C$, $\forall B \in \mathcal{B}, \forall C \in \mathcal{C}$ を満たすときをいう。N を Hilbert 空間 K 上に作用する単射的 ($B(K)$ から N への期待値が存在する) von Neumann 環とするとき、任意の $T \in B(K)$ に対して

$$d(T, N) \le 4 \sup\{\|P_{\mathfrak{M}}^{\perp} T P_{\mathfrak{M}}\| : \mathfrak{M} \in Lat\, N\},$$

が成り立つことが知られている (Kraus and Larson [7])。この節では我々は、$\mathfrak{L}$ への期待値と、それから定まる $T(\mathfrak{L})$, $T(\mathfrak{L}_+)$ への射影を構成する。一般に、$B(\mathbb{L}^2)$ から $\mathfrak{L}$ への期待値は存在しない。しかし、$R(M)'$ ($\subset B(\mathbb{L}^2)$) からの期待値は存在する。それは Arveson [1] の自然な拡張となるものである。

<u>定理 1.</u>　$R(M)'$ から $\mathfrak{L}$ への期待値 Φ で次を満たすものが存在する。

(i) $\Phi(P_n) = 1, \quad n \in \mathbb{Z}$,
(ii) $\Phi(R(M)' \cap alg\{P_n : n \in Z\}) \subset \mathfrak{L}_+$,
(iii) 任意の $A \in R(M)'$ に対して、$\Phi(A) \in \overline{co}^{w*}\{R_\delta^{*n} A R_\delta^n : n \in \mathbb{N}\}$.

ここで、$alg\{P_n : n \in \mathbb{Z}\} = \{A \in B(\mathbb{L}^2) : AP_n = P_n A P_n, \forall n \in \mathbb{Z}\}$ であり、これは、lower triangular operator からなる nest 環である。上の定理の Φ は、Λ を $\mathbb{N}$ 上の Banach 極限とするとき、任意の $A \in R(M)'$ に対して、

$$(\Phi(A)f, g)_{\mathbb{L}^2} = \Lambda(\{(R_\delta^{*n} A R_\delta^n f, g)_{\mathbb{L}^2}\}_{n \in \mathbb{Z}}),$$

で定義されるものである。さて、我々は、$T(\mathfrak{L}), T(\mathfrak{L}_+)$ に対して議論を行いたいので、上の期待値を $\mathbb{H}^2$ 上に制限したものを考えたい。いま、$R_0(M) = \{T_{R_x} : x \in M\}$ とおくと、$R_0(M)' \cong P_0 R(M)' P_0$ である。また、$T(\mathfrak{L})$ は $R_0(M)'$ の部分空間であることに注意する。任意の $A \in R_0(M)'$ に対して、

$$\pi(A) = P_0 \Phi(AP_0)|_{\mathbb{H}^2},$$

とおくことにより次の定理が得られる。

定理 2. $R_0(M)'$ から $T(\mathfrak{L})$ への正の線形射影 π で次を満たすものが存在する。

(i) $\pi(1) = 1, \quad \|\pi\| = 1$,
(ii) $\pi(T_B A) = T_B \pi(A), \quad \pi(AT_B) = \pi(A) T_B, \ \forall A \in R_0(M)', \ \forall B \in \mathfrak{L}$,
(iii) $\pi(R_0(M)' \cap alg\{P_n\}_{n=0}^\infty) \subseteq T_{\mathfrak{L}_+}$,
(iv) $\pi(A) \in \overline{co}^{w*}\{T_{R_\delta^{*n}} A T_{R_\delta^n} : n \in \mathbb{N}\}$.

いま、$M = \mathbb{C}1$ とすると $R_0(M)' = B(H^2(\mathbb{T}))$ となり、上の π が自然なものであることわかる。

4. 解析的 Toeplitz 作用素に対する距離公式.

ここでは、前節で構成した射影を用いて、解析的 Toeplitz 作用素全体 $T(\mathfrak{L}_+)$ に対する距離公式を導く。いま、$\mathfrak{M}$ を $\mathbb{H}^2$ の閉部分空間とするとき、$\mathfrak{M} \in Lat\,\mathfrak{L}_+$ であることと、$\mathfrak{M} \in Lat\,T(\mathfrak{L}_+)$ であることは同値であり、$\mathbb{H}^2$ は $\mathfrak{L}_+$-不変部分空間であることに注意する。$\mathbb{H}^2$ 上の作用素と $T(\mathfrak{L}_+)$ $(T(\mathfrak{R}_+))$ の間に次の量を定義する。

定義 3. 任意の $A \in B(\mathbb{H}^2)$ に対して次を定義する。

$$\begin{aligned} d(A) &= \inf\{\|A - T_B\| : B \in \mathfrak{L}_+\}, \\ \delta(A) &= \sup\{\|AT_B - T_B A\| : B \in \mathfrak{R}_+, \|B\| = 1\}, \\ \gamma(A) &= \sup\{\|P_{\mathfrak{M}}^\perp A P_{\mathfrak{M}}\| : \mathfrak{M} \in Lat\,\mathfrak{L}_+\}. \end{aligned}$$

このとき、すぐに次がわかる。

補題 4.　任意の $A \in B(\mathbb{H}^2)$ に対して

$$\gamma(A) \leq d(A), \quad \delta(A) \leq 2d(A),$$

が成り立つ。

非可換な Nehari's Theorem ([6]) を用いて次が示せる。

補題 5.　任意の $A \in \mathfrak{L}$ に対して、

$$d(T_A) = \beta(T_A) = \delta(T_A) = d(A, \mathfrak{L}_+),$$

が成り立つ。

これにより、$T(\mathfrak{L})$ の元と $T(\mathfrak{L}_+)$ に対する距離公式が得られた。次に前節で構成した射影を用いて、$R_0(M)'$ の元と $T(\mathfrak{L}_+)$ に対する距離公式を導く。

補題 6.

(1) 任意の $A \in R_0(M)' \cap alg\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して、$d(A) \leq \delta(A)$ が成り立つ。
(2) 任意の $A \in R_0(M)'$ に対して、$d(A) \leq \delta(A) + \gamma(A)$ が成り立つ。

(1) の証明は次の通りである。任意の $A \in R_0(M)' \cap alg\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して、定理 2(iii) より $\pi(A) \in T(\mathfrak{L}_+)$ である。T_{R_δ} が等長作用素であることより、

$$\begin{aligned} d(A) \leq \|A - \pi(A)\| &\leq \sup_n \|A - T_{R_\delta^{*n}} A T_{R_\delta^n}\| \\ &\leq \sup_n \|T_{R_\delta^n} A - A T_{R_\delta^n}\| \leq \delta(A). \end{aligned}$$

□

さらに次がいえる。

補題 7.

(1) 任意の $A \in R_0(M)' \cap alg\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して、$d(A) \leq 9\gamma(A)$ が成り立つ。
(2) 任意の $A \in R_0(M)'$ に対して、$d(A) \leq 19\gamma(A)$ が成り立つ。

以上をまとめて、$R_0(M)'$ の元と $T(\mathfrak{L}_+)$ に対する距離公式は次の様になる。

<u>**定理** 8.</u>　(1) 任意の $A \in R_0(M)' \cup alg\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して、

$$\gamma(A) \leq d(A) \leq \delta(A) \leq 2d(A) \leq 18\gamma(A),$$

が成り立つ。

(2) 任意の $A \in R_0(M)'$ に対して、

$$\delta(A) \leq 2d(A),\ \gamma(A) \leq d(A) \leq 19\gamma(A),$$

が成り立つ。

最後に、$\mathbb{H}^2$ 上の作用素と $T(\mathfrak{L}_+)$ に対する距離公式を導く。すなわち、$T(\mathfrak{L}_+)$ の hyperreflexivity を示す。そのためには、次の補題が必要である。

<u>**補題** 9.</u>　$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ を $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ なる作用素環とする。$\mathcal{A}$ が距離定数 C_1 を持つ hyperreflexive 環で、ある定数 C_2 が存在して、任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して、

$$d(A, \mathcal{B}) \leq C_2 \sup\{\|P_{\mathfrak{M}}^{\perp} A P_{\mathfrak{M}}\| : \mathfrak{M} \in Lat\,\mathcal{B}\},$$

を満たすと仮定する。そのとき、$\mathcal{B}$ は距離定数 $C_1 + C_2 + C_1C_2$ 以下の hyperreflexive 環である。

いま、M が単射的であることと $R_0(M)'$ が単射的であることは同値である。よってこのとき、上の補題で $\mathcal{A} = R_0(M)'$, $\mathcal{B} = T(\mathfrak{L}_+)$ 、さらに、$C_1 = 4$、補題 8(2) より $C_2 = 19$ とおくことにより我々は結論を得る。

<u>**定理** 10.</u>　M が単射的であるならば、任意の $A \in B(\mathbb{H}^2)$ に対して、

$$d(A) \leq 99\gamma(A),$$

が成り立つ。

これより、解析的 Toeplitz 作用素の全体 $T(\mathfrak{L}_+)$ が距離定数 99 以下の hyperreflexive 環であることが示された。

参考文献

[1] W. B. Arveson, *Interpolation problems in nest algebras,* J. Funct. Anal. **20**(1975), 208–233.

[2] K. R. Davidson, *The distance to the analytic Toeplitz operators,* Illinois J. Math. **31**(1987), 265–273.

[3] — , *"Nest Algebras,"* Pitman Research Notes in Math., Vol. 191, Longman House, Harlow, U. K., 1988.

[4] U. Haagerup, *The standard form of von Neumann algebras,* Math. Scand. **37**(1975), 271–283.

[5] — , *"L^p-spaces associated with an arbitrary von Neumann algebras,"* Algèbres d'opérateurs et leurs applications en physique mathematique (Colloques internationaux du CNRS, No. 274, Marseille 20–24, Juin, 1977), Editions du CNRS, Paris, 1979, pp. 175–184.

[6] — , *Operator valued weights in von Neumann algebras II,* J. Funct. Anal. **33**(1979), 339–361.

[7] Y. Imina and K.-S. Saito, *Hankel operators associated with analytic crossed products,* to appear in Bull. Canad. Math.

[8] J. Kraus and D. R. Larson, *Reflexivity and distance formulae,* Proc. London Math. Soc. **53**(1986), 340–356.

[9] M. McAsey, P. S. Muhly and K.-S. Saito, *Nonselfadjoint crossed products (Invariant subspaces and maximality),* Trans. Amer. Math. Soc. **248**(1979), 381–409.

[10] — , *Nonselfadjoint crossed products. II,* J. Math. Soc. Japan **33**(1981), 485–495.

[11] — , *Nonselfadjoint crossed products . III,* J. Operator Theory **12**(1984), 3–22.

[12] S. Rosenoer, *Nehari's Theorem and the tensor product of hyper-reflexive algebras,* J. London Math. Soc. **47**(1993), 349–357.

[13] K.-S. Saito, *Toeplitz operators associated with analytic crossed products,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **108**(1990), 539–549.

[14] — , *Toeplitz operators associated with analytic crossed products II (Invariant subspaces and factorization),* Integral Equations and Operator Theory **14**(1991), 251–275.

[15] B. Solel, *Analytic operator algebras (Factorization and an expectation),* Trans. Amer. Math. Soc. **287**(1985), 799–817.

[16] M. Takesaki, *Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III,* Acta Math. **131**(1973), 249–310.

[17] M. Terp, *L^p-spaces associated with von Neumann algebras,* Rapport No. 3(1981), University of Odense.